I. La consapevolezza che ogni investimento richiede un tempo più o meno lungo prima di diventare produttivo è stata ben presente nel pensiero economico fino dalle sue più remote origini (cfr. [11: ch. I]); la troviamo in particolare chiaramente espressa nell'opera degli economisti classici britannici ed ha trovato una prima espressione in termini matematici nei lavori della scuola austriaca [4], [21], [10].

La quasi contemporanea formulazione del problema dell'equilibrio economico generale di Walras [17], la sua brillante soluzione ad opera di Samuelson [6] e Debreu [5] e la fondamentale opera di von Neumann [19], se hanno fornito potenti strumenti d'indagine per un gran numero di importanti problemi (si veda per questo la recente rassegna di Arrow ed Intriligator [1; vol. 2]), hanno d'altra parte provocato il relegamento in secondo piano dei contributi della scuola austriaca, finché essi non sono stati ripresi, rielaborati e completati da John Hicks [11] (cfr. anche [12: ch. XIV]) per dar luogo a quella che egli stesso ha voluto chiamare teoria neo-austriaca.

Un approfondito studio degli aspetti matematici del modello è stato in seguito svolto da Belloc [3]; ci atterremo a questo studio soprattutto nelle sezioni III, IV, V.

In questo seminario ci proponiamo di esporre brevemente le idee fondamentali che costituiscono la base teorica di tale modello rinviando a [11] e [3] per tutto quanto la forzata concisione ci costringerà ad omettere; passeremo poi a proporre l'applicazione del modello allo studio dell'evoluzione di un sistema economico soggetto a mutamenti tecnici del processo di produzione.

Per uno studio sul fondamento economico della teoria di Hicks rimandiamo a [2] e [16].

II. Caratteristica fondamentale del modello neo austriaco è la descrizione del processo produttivo come successione di attività connesse causalmente: un investimento al tempo t contribuisce alla produzione di beni in tutto

un intervallo di tempo successivo (non necessariamente immediatamente successivo) e nel contempo la produzione di beni al tempo t presuppone un determinato flusso d'investimenti in un intervallo di tempo precedente.

Tratteremo qui solo il modello cosidetto integrato nel quale si considera il lavoro come unico fattore di produzione ed i diversi beni di consumo si suppongono prodotti in proporzioni fisse, sicché la produzione può essere misurata in termini di panieri standard di tali beni che fungono quindi da numerario. Per una trattazione del modello non integrato, nel quale compaiono più beni prodotti indipendentemente, rimandiamo a [11] e [3].

Coerentemente con quanto sopra, definiamo processo elementare di produzione una coppia di funzioni

$$a,b : [0,D] \to R,$$

che supporremo sempre almeno continue a tratti e non negative, tali che esista una costante $\delta \in (0,D)$ tale che

$$(1) \qquad \begin{aligned} a(t) &> 0 \qquad \forall t \in [0,\delta] \\ b(t) &= 0 \qquad \forall t \in [0,\delta] \end{aligned} \qquad \text{(cfr. [11: ch. 2 § 1])}$$

a(t) rappresenta il lavoro necessario al tempo t per mantenere in esercizio il processo (attivato al tempo $t = 0$)

b(t) rappresenta la produzione di beni di consumo fornita al tempo t dal medesimo processo; si noti che l'ipotesi (1) significa che la produzione è possibile solo dopo un periodo di investimenti di durata δ.

D dicesi durata del processo elementare [11: ch. 2 § 2 e § 4]

δ dicesi tempo di costruzione "della macchina relativa al processo".

In ogni istante di tempo si suppone che venga attivato un certo numero (non negativo) di processi elementari che indicheremo con $x(t)$; la

funzione $x(t)$ si dice tasso d'attivazione dei processi elementari. Pertanto in ogni istante l'apparato produttivo risulta essere composto da un insieme di processi elementari di differente età. Definiamo infine le due funzioni

$$(2) \qquad Q(t) = \int_{t-D}^{t} x(s)\, b(t-s)ds$$

$$(3) \qquad L(t) = \int_{t-D}^{t} x(s)a(t-s)ds \; .$$

$Q(t)$ rappresenta la produzione del sistema economico al tempo t.
$L(t)$ rappresenta il livello dell'occupazione al tempo t.

Osserviamo che (2) e (3) sottintendono due ipotesi economiche rilevanti: l'infinita divisibilità dei processi elementari ed il rendimento costante di scala [11: ch. 3 § 1].

E' evidente che la conoscenza della funzione $x(t)$ è determinante ai fini della conoscenza dell'evoluzione del sistema economico; essa è chiaramente determinata dalle decisioni d'investimento degli imprenditori. Nel seguito esamineremo due diverse ipotesi sul comportamento degli imprenditori e la conseguente evoluzione del tasso d'attivazione $x(t)$.

III. Cominciamo ora a presentare una delle più rilevanti applicazioni del modello neo-austriaco, precisamente l'analisi del sentiero di traversa: con questo termine s'intende l'evoluzione di un sistema economico che fa seguito all'introduzione di una nuova e più profittevole tecnica di produzione [11; ch. 7 § 1]. Per fare questo supponiamo che prima dell'istante $t = 0$ sia disponibile un certo tipo di processo elementare di produzione, che indicheremo con a^*, b^*, ed il sistema si trovi in uno stato a crescita uniforme (stea-

dy-state)(*).

Dall'istante $t = 0$ in poi si rende invece disponibile un nuovo tipo di processo elementare che indicheremo con a,b; supponendo che ci sia concorrenza perfetta sul mercato dei capitali, l'ipotesi che quest'ultimo sia più profittevole del precedente comporta la cessazione dell'attivazione di processi del vecchio tipo all'istante $t = 0$ in luogo dei quali cominceranno ad essere attivati processi del tipo nuovo; se indichiamo con $x^*(t)$ il tasso d'attivazione dei processi del vecchio tipo risulterà $x^*(t) = 0$ per $t \geq 0$; analogamente se $x(t)$ indica il medesimo tasso relativo ai nuovi processi allora $x(t) = 0$ per $t < 0$.

Esaminiamo il sentiero di traversa sotto le seguenti ipotesi.

(*) Si dice che un sistema economico si trova in uno stato a crescita uniforme quando tutte le variabili crescono esponenzialmente al medesimo tasso; nel caso in questione, detto g^* il tasso di crescita, questo comporta le seguenti equazioni:

(4) $$x^*(t) = x^* e^{g^* t} \qquad t<0$$

(5) $$Q(t) = Q^* e^{g^* t} \qquad t<0$$

(6) $$L(t) = L^* e^{g^* t} \qquad t<0$$

Ove x^*, Q^* ed L^* sono delle costanti positive.
Sostituendo (4) successivamente in (2) e (3) ed utilizzando rispettivamente (5) e (6) si ottiene

(7) $$Q^* = x^* \int_0^{D^*} b^*(s)\, e^{-g^* s} ds$$

(8) $$L^* = x^* \int_0^{D^*} a^*(s)\, e^{-g^* s} ds \,.$$

1. Salario fisso

(9) $\qquad w(t) = w^{\cdot} \qquad \forall t \in R$

2. Pieno funzionamento

(10) $\qquad Q(t) = wL(t) + C(t) \qquad \forall t \in R,$

ove $C(t)$ indica i consumi extrasalariali; cioè la quota dei profitti destinata ai consumi.

3. Rendimenti netti crescenti. Definendo rendimento netto del processo elementare a,b la funzione

(11) $\qquad q(t) = b(t) - w\, a(t) \qquad t \in [0,D]$

supporremo che q e q* siano funzioni di classe C^1 non decrescenti in [0,D] e [0,D*] rispettivamente.

4. Invarianza del consumo extrasalariale rispetto al cambiamento tecnico. Per l'ipotesi che il sistema economico si trovi in uno stato a crescita uniforme per $t < 0$ al tasso g*, evidentemente

(12) $\qquad C(t) = c^* e^{g^* t} \qquad t < 0;$

(10), (7) e (8) forniscono

(13) $\qquad c^* = Q^* - wL^* \quad ;$

utilizzando (7.11) si ottiene

(14) $\qquad c^* = x^* \int_0^{D^*} e^{-g^* s}\, q^*(s) ds$

L'ipotesi implica che si suppone che (12) valga anche per $t>0$. Affinché il

modello abbia senso bisognerà supporre che g^* e q^* siano tali che $c^*>0$ (*).

5. Assenza di troncamenti anticipati. Questo significa che tutti i processi di vecchio tipo attivati prima dell'istante $t=0$ vengono mantenuti in esercizio per un tempo pari alla loro durata D^* prevista prima dell'introduzione dell'innovazione tecnica.

Prima di proseguire è opportuno qualche commento sulle ipotesi introdotte.

La prima ipotesi presuppone un'incondizionata adattabilità del livello di occupazione; si tratta senza dubbio di un'ipotesi estrema cui si contrappone l'altra ipotesi estrema in cui si suppone fisso il livello d'occupazione (piena occupazione) ed incondizionatamente variabile il salario reale; rimandiamo a [3] e [11] per la trattazione del modello sotto questa seconda ipotesi osservando che ovviamente il comportamento di un sistema economico reale si collocherà per così dire a mezza via fra quelli così ottenuti.

La seconda ipotesi garantisce che in ogni istante c'è equilibrio fra domanda $wL(t) + C(t)$ ed offerta (= produzione) $Q(t)$ sul mercato del bene di consumo. Il termine $wL(t)$ può essere interpretato sia come consumo dei lavoratori (la cui propensione al risparmio è supposta nulla) sia come somma degli investimenti effettuati al tempo t per attivare nuovi processi elementari più le spese necessarie per mantenere in esercizio i processi già attivati. Questo permette di chiarire anche il significato della quarta ipotesi che può allora essere interpretata come invarianza degli investimenti almeno nell'intervallo $[0,\delta]$ ed il loro successivo progressivo adeguarsi ai nuovi livelli della produzione. Tale ipotesi, introdotta da Hicks col nome di ipotesi Q [11: ch. 8 § 1], non è necessariamente la più verosimile soprattutto sul lungo periodo (cfr. [9: § 7.2]); nelle sezioni VII-IX presenteremo un'ipotesi alternativa.

La terza ipotesi serve essenzialmente a fissare le idee su un ti-

---

(*) Questo significa che g^* è strettamente minore del tasso di rendimento interno dei processi elementari del vecchio tipo (cfr. (33)).

po di processo determinato e può essere considerata analoga a quella dei profili semplici di Hicks [11: ch. 7]; per ipotesi diverse rimandiamo a [11: ch. 17] e [3].

La quinta ipotesi è introdotta per semplificare il modello: nella realtà la maggiore redditività dei nuovi processi può rendere antieconomica la prosecuzione di alcuni processi del vecchio tipo già attivati prima dell'istante $t = 0$ [11: ch. 2 § 4], [9: § 6]; le modalità con cui avviene il troncamento non sono in genere matematicamente esprimibili con semplicità; ci limiteremo dunque a segnalare [3 : ch. 8] dove il problema è ampiamente trattato.

IV. Le ipotesi sopra dichiarate ci consentono ora di ricavare una equazione nella sola incognita $x(t)$. Per la definizione di rendimento netto (11), da (2) e (3) si ottiene

$$(15)\quad Q(t)-wL(t)=\begin{cases} \int_{t-D^*}^{t} x^*(s)\, q^*(t-s)ds & \text{per } t<0 \\ \int_{t-D^*}^{0} x^*(s)q^*(t-s)ds + \int_{t-\min\{t,D\}}^{t} x(s)q(t-s)ds & \text{per } t\in[0,D^*] \\ \int_{t-\min\{t,D\}}^{t} x(s)q(t-s)ds & \text{per } t>D^* . \end{cases}$$

(15) evidenzia il fatto che l'apparato produttivo è costituito solo da vecchi processi per $t=0$, da vecchi e nuovi insiemi per $t\in[0,D^*]$ (prima fase della traversa) e da soli nuovi per $t>D^*$ (fase ulteriore).

Utilizzando l'ipotesi di pieno funzionamento (10) e la (12) si ottiene

$$(16)\quad \int_{t-\min\{t,D\}}^{t} x(s)\, q(t-s)ds = \begin{cases} c^* e^{g^* t} - \int_{t-D^*}^{0} x^*(s) q^*(t-s) ds & \text{per } t \in [0,D^*] \\ c^* e^{g^* t} & \text{per } t > D^* \; ; \end{cases}$$

sostituendo ora (4) e (14) in (16) si ottiene

$$(17)\quad \int_{t-\min\{t,D\}}^{t} x(s)q(t-s)ds = \int_{t-\min\{t,D^*\}}^{t} x^* e^{g^* s}\, q^*(t-s)ds$$

Evidentemente (17) è un'equazione integrale di Volterra di prima specie in $x(t)$ con nucleo

$$(18)\quad \bar{K}(u) = \begin{cases} q(u) & u \in [0,D] \\ 0 & u > D \end{cases}$$

e termine noto

$$(19)\quad \bar{h}(t) = \int_{t-\min\{t,D^*\}}^{t} x^* e^{g^* s}\, q^*(t-s)ds$$

V. Il primo obbiettivo che ci poniamo è di ottenere informazioni sull'evoluzione del tasso d'attivazione $x(t)$ durante la prima fase della traversa ($t \in [0,D^*]$); a tal fine riscriviamo (17) nella seguente forma

(20) $$\int_{t-\min\{t,D\}}^{t} q(t-s)\,(x(s)-x^*\, e^{g^*s})ds = \int_{0}^{t} q^*(t-s)x^*e^{g^*s} - \int_{t-\inf\{t,D\}}^{t} q(t-s)x^*e^{g^*s}ds;$$

integrando per parti nel membro sinistro di (20) e ponendo

(21) $$Y(t) = \int_{0}^{t} x(s)ds - \int_{0}^{t} x^*e^{g^*s}ds$$

si ottiene

(22) $$Y(t) + \int_{t-\min\{t,D\}}^{t} \frac{q'(t-s)}{q(0)}\, Y(s)ds =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{q(0)} \displaystyle\int_{0}^{t} (q^*(u)-q(u))x^*\, e^{g^*(t-u)}du & \text{per } t \in [0, \inf\{D,D^*\}] \\ \dfrac{1}{q(0)} \left(\displaystyle\int_{0}^{D} (q^*(u)-q(u))\, x^*e^{g^*(t-u)}\, du + \int_{D}^{t} q^*(u)x^*e^{g^*(t-u)}\, du + q(D)Y(t-D)\right) & \text{per } t \in (D,D^*) \text{ se } D < D^*. \end{cases}$$

(22) è un'equazione integrale di Volterra di seconda specie con nucleo

(23) $$N(u) = \begin{cases} \dfrac{q'(u)}{q(0)} & \text{per } u \in [0,D] \\ 0 & \text{per } u > D \end{cases}$$

nell'incognita $Y(t)$; (21) mostra chiaramente che $Y(t)$ indica la differenza fra il numero di nuovi processi attivati nell'intervallo di tempo $[0,t]$ ed il numero di vecchi processi che sarebbe stato attivato nel medesimo tempo qualora la innovazione tecnologica non avesse avuto luogo. Detto $k(t)$ il termine noto di (22), è un risultato classico [17: ch. I Satz. 7.6] che la soluzione è data da

$$Y(t) = k(t) + \int_0^t S(t-u)\, k(u)\, du \tag{24}$$

essendo $S(u)$ il nucleo risolvente

$$S(u) = \sum_{i=o}^{\infty} (-1)^{i+1} N^{(i)}(u); \tag{25}$$

(25) è la serie dei nuclei iterati definiti per ricorrenza da

$$\begin{aligned} N^{(o)}(u) &= N(u) \\ N^{(i)}(u) &= \int_0^u N(u-v)\, N^{(i-1)}(v)\, dv. \end{aligned} \tag{26}$$

L'ipotesi di crescenza dei rendimenti netti assicura che $q'(u) \geq 0$ per ogni $t \in [0,D]$, d'altra parte (1) e (11) assicurano che $q(o) < 0$ onde $N(u) \leq 0$ per ogni $u \in [0,D]$ (v. (23)); dalla (26) poi si trae $(-1)^{i+1} N^{(i)}(u) \geq 0$ per ogni $u \in [0,D]$ e per ogni $i = 0,1,2,\dots$; (25) assicura pertanto che

$$S(u) \geq 0 \qquad \forall u \in [0,D]. \tag{27}$$

Per completare lo studio della soluzione (24) è necessario introdurre qualche ipotesi che ci permetta di specificare la funzione $k(t)$; precisamente supporremo che i processi elementari di nuovo tipo siano più meccanizzati di quelli di tipo vecchio: questo significa che, supposti uguali i flussi

di produzione

$$(28) \qquad b(t) = b^*(t) \qquad \forall t \in [0, \min\{D^*,D\}],$$

i nuovi processi richiedono un maggior investimento iniziale a fronte di una minor necessità di manodopera per il funzionamento successivo

$$(29) \qquad \begin{array}{ll} a^*(t) < a(t) & \forall t \in [0,\tau) \\ a^*(t) > a(t) & \forall t \in (\tau, \min\{D,D^*\}] \end{array}$$

Poiché

$$(30) \qquad k(t) = \frac{1}{q(0)} \int_0^t (q^*(u)-q(u)) \; x^* \; e^{g^*(t-u)} \, du \qquad \text{per } t \in [0,\inf\{D,D^*\}]$$

(28) e (29) portano a concludere attraverso (11) che la funzione $k(t)$ è negativa in un intorno destro dell'origine; d'altra parte l'ipotesi di maggiore redditività dei nuovi processi assicura che (*) esiste $\bar{\tau} \in (\tau,\min\{D,D^*\})$ tale che

$$(31) \qquad k(t) \begin{cases} < 0 & \text{per} \quad t \in (0,\bar{\tau}) \\ > 0 & \text{per} \quad t \in (\bar{\tau}, \min\{D^*,D\}). \end{cases}$$

Da (24), (27) e (31) segue dunque che $Y(t)$ sarà negativa e prevalentemente decrescente in un intorno destro di zero per poi diventare prevalentemente cre-

---

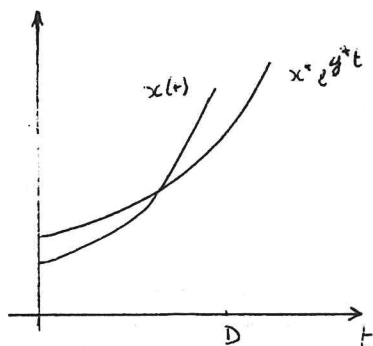
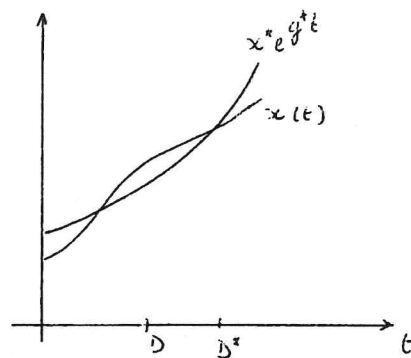
(*) Si osservi che l'integrale che compare al secondo membro di (30) è il valore capitale della parte del vecchio processo che si svolge nell'intervallo di tempo $[0,t]$ meno l'analoga quantità relativa al nuovo processo quando il tasso d'interesse è g^* [11 : ch. 2 § 3, 4 e 7].
Si osservi poi che l'ipotesi che c^* sia positiva significa che g^* è minore del tasso di rendimento interno dei processi di vecchio tipo (cfr. (33)).

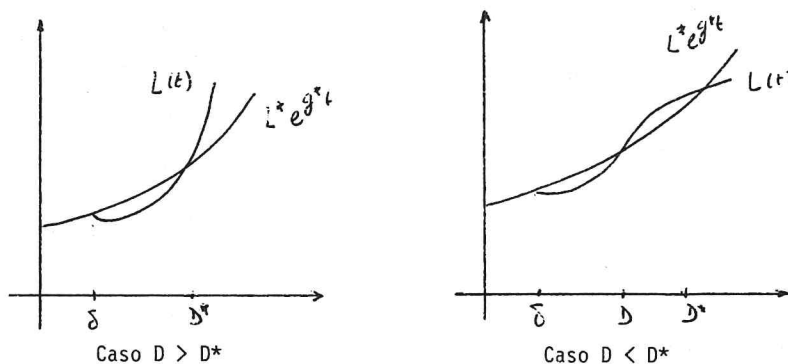
scente dopo il tempo $t = \bar{\tau}$ ed infine eventualmente risultare positiva vicino a $\min\{D,D^*\}$.

Nel caso di allungamento dei processi ($D>D^*$) questo conclude lo studio dell'andamento del tasso d'attivazione nella prima fase della traversa.

Nel caso dell'accorciamento ($D<D^*$) rimane da esaminare l'intervallo $[D,D^*]$; in tale intervallo risulta

$$k(t) = \frac{1}{q(0)} \int_0^D (q^*(u)-q(u))x^* e^{g^*(t-u)} du + \frac{1}{q(0)} \int_D^t q^*(u) x^* e^{g^*(t-u)} du + \frac{q(D)}{q(0)} Y(t-D); \tag{32}$$

evidentemente il secondo addendo del membro destro di (32) è negativo e decrescente in un intorno destro di D; esso può pertanto rendere nuovamente decrescente ed eventualmente negativa la funzione $k(t)$ in un intorno sinistro di D^*. In questo caso la funzione $Y(t)$ può riprendere a decrescere in una parte dell'intervallo $[D,D^*]$. Lo studio testé concluso si compendia nei due grafici seguenti

Caso $D > D^*$

Caso $D < D^*$

Da queste considerazioni e da (3) si può facilmente ricavare lo andamento dell'occupazione: riportiamo due grafici ad illustrazione del risultato

Considerazioni analoghe si possono fare a proposito dell'andamento della produzione o degli investimenti.

Concludiamo lo studio della prima fase della traversa ricordando che con metodi simili a quelli utilizzati nello studio della funzione Y(t) si può provare che x(t) è positiva in un intorno destro dell'origine; il fatto che lo rimanga in tutto R^+ dipende in ultima analisi dalle funzioni q(t) e q*(t): nel seguito supporremo che ciò avvenga rimandando a [23] per una discussione su questo punto.

VI. Completiamo lo studio del sentiero di traversa esaminando il comportamento asintotico per $t \to +\infty$ del tasso d'attivazione x(t).

Teorema 1. Esiste un unico numero reale positivo r, tale che

$$L(\bar{K})\ (r) = 0 \quad (*) \tag{33}$$

(*) Il numero r dicesi tasso di rendimento interno dei processi elementari di nuovo tipo.

(essendo K il nulceo (18) dell'equazione (27)).

Inoltre

(34) $$x(t) \sim e^{rt} \qquad \text{per } t \to +\infty$$

Dimostrazione. Utilizzando ben note proprietà della trasformata di Laplace [14 : § 3 th. 3.5 ed es. II dopo th. 3.13] l'equazione (17) può essere trasformata nella

(35) $$L(x)(s) = \frac{L(\bar{h})(s)}{L(\bar{K})(s)} .$$

Dall'espressione (20) della funzione $\bar{h}$ è immediato constatare che il numeratore del membro destro di (35) è una funzione olomorfa nel semipiano $\{s \in C : \mathrm{Re}\, s > g^*\}$. D'altra parte le ipotesi di maggiore redditività dei vecchi processi rispetto ai nuovi e quella di crescenza dei rendimenti netti assicura che esiste uno ed un solo $r \in R^+$ con $r > g^*$ tale che

(36) $$L(\bar{K})(r) = 0$$

Infine Violi [18] ha provato che sotto le medesime ipotesi tutte le eventuali radici complesse della funzione $L(\bar{K})(s)$ hanno parte reale strettamente minore di r.

Si può così concludere che il membro destro di (35) è una funzione olomorfa nel semipiano $\{s \in C : \mathrm{Re}\, s > r\}$. Si prova poi facilmente che essa è la trasformata di Laplace di una funzione localmente sommabile. E' quindi possibile invocare il teorema tauberiano di Wiener [22: ch. V th. 14] per concludere la dimostrazione di (34).

Concludiamo con alcune osservazioni.

Notiamo in primo luogo che la dimostrazione proposta sopra differisce dai precedenti approcci al medesimo problema [9], [18] superandone le

difficoltà peraltro già in parte osservate in [18].

Sottolineiamo poi esplicitamente il fatto che il teorema 1 non implica la convergenza del sistema economico verso un nuovo stato a crescita uniforme dello stesso tipo di quello supposto per ipotesi sussistere prima del tempo $t = 0$: se infatti (34) garantisce mediante (2) e (3) che anche $L(t)$ e $Q(t)$ crescono al tasso r, per l'ipotesi (12) il consumo extra salariale $C(t)$ continua a crescere al tasso g^* (cfr. [3 : ch. 6 sect. 3]).

VII. Analizziamo ora il sentiero di traversa nell'ipotesi di una dinamica del consumo extrasalariale alternativa a quella descritta dall'ipotesi 4 (§ III). Supporremo qui che la quota dei profitti destinata al consumo al tempo t sia proporzionale al valore capitale $V(t)$ del complesso dei processi elementari che costituiscono il sistema produttivo al medesimo tempo t. Per definire tale quantità occorre precisare in ogni istante il tasso d'interesse. L'ipotesi di concorrenza perfetta sul mercato dei capitali che continuiamo a supporre valida, garantisce che il tasso di interesse per $t < 0$ è uguale al tasso di rendimento interno dei processi elementari di vecchio tipo: precisamente quell'unico numero reale positivo r^* per il quale (cfr. (33)).

$$(37) \qquad L(q^*)(r^*) = 0.$$

Analogamente per $t > 0$ il tasso d'interesse sarà il tasso r di rendimento interno dei processi elementari di tipo nuovo (33). L'ipotesi che i nuovi processi siano più profittevoli dei vecchi comporta ovviamente

$$(38) \qquad r > r^*$$

Specificata in tal modo la dinamica del tasso d'interesse, possiamo definire il valore capitale $V(t)$ dell'insieme dei processi elementari in esercizio al tempo t come segue

$$
(39)\quad V(t) = \begin{cases}
\displaystyle\int_{t-D^*}^{t} x^*(s) \left(\int_{t}^{D^*+s} e^{-r^*(u-t)} q^*(u-s)du\right)ds & \text{se } t < 0 \\[2ex]
\displaystyle\int_{t-D^*}^{0} x^*(s)\left(\int_{t}^{D^*+s} e^{-r(u-t)} q^*(u-s)du\right)ds + \int_{t-\min\{t,D\}}^{t} x(s)\left(\int_{t}^{D+s} e^{-r(u-t)} q(u-s)du\right)ds & \text{se } t \in [0,D^*] \\[2ex]
\displaystyle\int_{t-\min\{t,D\}}^{t} x(s) \left(\int_{t}^{D+s} e^{-r(u-t)} q(u-s)\, du\right)ds & \text{se } t > D^*.
\end{cases}
$$

Osserviamo che in (39) compaiono solo vecchi processi prima dell'istante $t = 0$, convivono vecchi e nuovi processi per $t \in [0,D^*]$ (prima fase della traversa), mentre per $t > D^*$ l'apparato produttivo risulta composto di soli nuovi processi (fase ulteriore, cfr. (15)).

Siamo ora in grado di formulare l'ipotesi alternativa alla 4 del § 3: anziché supporre che valga (12) per ogni $t \in R$ supporremo che

$$
(40)\qquad C(t) = \beta V(t) \qquad \forall t \in R
$$

essendo β una costante positiva che misura la propensione al consumo extrasalariale.

Per poter paragonare la portata di (40) rispetto a (12) manterremo ferme le altre ipotesi fatte nel § 3 e continueremo a supporre che per $t < 0$ il sistema economico si trovi in uno stato a crescita uniforme descritto da (4), (5), (6), (12). E' facile mostrare che ciò è compatibile con le ipotesi sul consumo (40) e di pieno funzionamento (10): uguagliando il membro destro di (39) con lo stesso membro di (15) si ottiene

$$
(41)\qquad \int_{t-D^*}^{t} x^*(s)\; q^*(t-s)ds = \beta \int_{t-D^*}^{t} x^*(s) \left(\int_{t}^{D^*+s} e^{-r^*(u-t)} q^*(u-s)du\right)ds
$$

sostituendo poi (4) in (41) è facile provare che

$$(42)\qquad \beta = r^* - g^* .$$

(42) stabilisce dunque una relazione fra tasso di rendimento interno r^*, tasso di crescita g^* e la costante β che è economicamente del tutto naturale. E' evidente che affinché il modello abbia significato economico è necessario supporre che $g^* < r^*$.

VIII. Ricaviamo ora l'equazione che descrive il tasso di attivazione $x(t)$ sul sentiero di traversa. Ancora per (10) e (40) essa si ottiene uguagliando i membri destri di (39) e (15); per $t \in [0,D^*]$ si ha

$$\beta\Big[\int_{t-D^*}^{0} x^* e^{g^*s}\Big(\int_t^{D^*+s} e^{-r(u-t)} q^*(u-s)du\Big)ds + \int_{t-\min\{t,D\}}^{t} x(s)\Big(\int_t^{D+s} e^{-r(u-t)} \cdot$$

(43)

$$\cdot\, q(u-s)du\Big)ds\Big] = \int_{t-D^*}^{0} q^*(t-s)x^* e^{g^*s}\, ds + \int_{t-\min\{t,D\}}^{t} q(t-s)x(s)ds\ ;$$

per $t > D^*$ si trova invece

$$(44)\qquad \int_{t-\min\{t,D\}}^{t} x(s)\,\Big(q(t-s)-\beta\int_t^{D+s} e^{-r(u-t)}\, q(u-s)du\Big)ds = 0.$$

(43) e (44) sono le analoghe di (16) sotto l'ipotesi (40); tenendo conto di (10) esse possono essere espresse in forma compatta ponendo

$$(45)\quad h(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{t-D^*}^{0} x^* \, e^{g^*u} \left(\beta \int_{t}^{D^*+u} e^{-r(s-t)}\, q^*(s-u)ds - q^*(t-u)\right)du & \text{per } t \in [0,D^*] \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

$$(46)\quad K(u) = \begin{cases} q(u) - \beta e^{ru} \displaystyle\int_{u}^{D} e^{-r\sigma}\, q(\sigma)d\sigma & \text{per } u \in [0,D] \\ 0 & \text{altrove .} \end{cases}$$

(43) e (44) divengono in tal modo un'equazione integrale di Volterra di prima specie nell'incognita $x(t)$ con nucleo $K(u)$ (46) e termine noto $h(t)$ (45):

$$(47)\qquad (K * x)(t) = h(t) \qquad \text{per} \quad t > 0.$$

(47) è l'analoga di (17) nel caso presente.

Se l'analogia fra le due equazioni è perfetta altrettanto non può dirsi accada per le soluzioni; mentre è evidente da (19) che $\bar{h}(0)=0$, un breve esame di (45) che tenga conto di (38) e della definizione (37) di tasso di rendimento interno assicurano che

$$(48)\qquad h(0) < 0.$$

E' evidente che (48) non consente di trovare soluzioni di (47) in un qualche spazio di funzioni ordinarie (per esempio localmente sommabili); è quindi necessario cercare tale soluzioni in un opportuno spazio di distribuzioni [16]. Precisamente definiamo spazio delle distribuzioni trasformabili nel senso di Laplace [13: ch. 8 Def. 8.2.1] [24: ch. 8 § 3 (4)], lo spazio delle distribuzioni $T \in \mathscr{D}'(R)$ con supp T inferiormente limitato per le quali esiste $\xi \in R$, tale che $e^{-\xi t} T_t$ sia una distribuzione temperata [16: ch. 7, § 4]; in questo ambiente sussiste il seguente risultato

Teorema 2. L'equazione (47) ha soluzione $x(t)$ nello spazio delle distribuzioni trasformabili nel senso di Laplace; di più essa si può esprimere nella forma

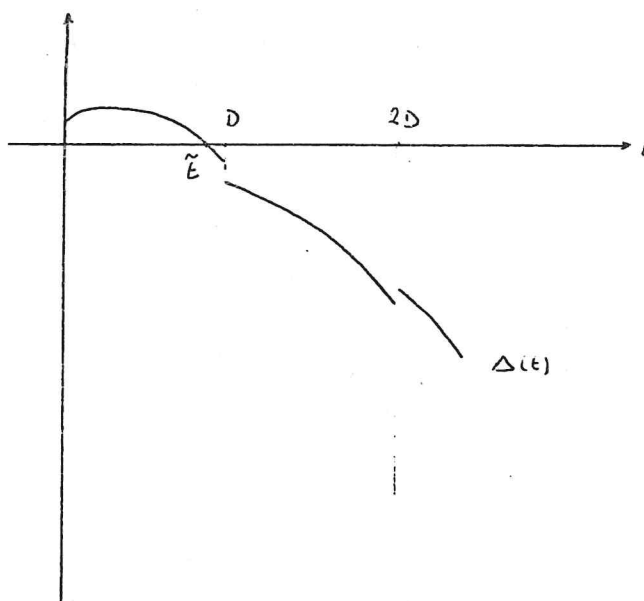
$$x(t) = \frac{h(0)}{q(0)} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{q(D)}{q(0)}\right)^{j} \delta_{t-jD} + x_1(t), \tag{49}$$

essendo $x_1(t)$ la derivata di una funzione continua con supporto contenuto in $[0,+\infty)$.

E' interessante cercare di confrontare la soluzione di (47) a quella di (17); a tal fine poniamo

$$X(t) = (x*H)(t) \tag{50}$$

essendo H la funzione di Heaviside: $X(t)$ altro non è se non il numero di nuovi processi attivati nell'intervallo di tempo $[0,t]$ nell'ipotesi che valga (40). Indichiamo poi con $\bar{X}(t)$ la stessa quantità nell'ipotesi che valga (12) per ogni $t \in R$: evidentemente $\bar{X}(t)$ è data ancora dal secondo membro di (50) quando $x(t)$ indica la soluzione di (17) anzicché quella di (47). Riassumiamo il risultato del confronto nel seguente teorema.

Teorema 3. La funzione differenza $\Delta(t) = X(t)-\bar{X}(t)$ è positiva in un intorno destro $[0,\tilde{t}]$ dell'origine fuori del quale risulta semrpe negativa. Se la funzione $q(t)$ (v. (11)) è sufficientemente regolare, $\Delta(t)$ risulta derivabile per ogni $t \neq jD$ $j = 0,1,2,\ldots$, ed ivi $\Delta'(t) < 0$ per t sufficientemente grande

IX. Concludiamo la discussione del sentiero di traversa nell'ipotesi (40) esaminando il comportamento asintotico della funzione X(t) per $t \to +\infty$.

Teorema 4. Supponiamo che la trasformata di Laplace $L(\bar{K})(s)$ della funzione (18) abbia tutti gli zeri diversi da r nel semipiano Rez < g essendo

(51) $$g = r-\beta \;;$$

supponiamo inoltre che la funzione $x_1(t)$ che compare in (49) sia non negativa. Allora la funzione X(t) si esprime nella forma

(52) $$X(t) = X(0) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{q(D)}{q(0)}\right)^j \quad H(t-jD) + X_1(t)$$

ove $X_1(t)$ è una funzione continua in $[0,+\infty)$ tale che

(53) $X_1(t) \sim e^{gt}$ per $t \to +\infty$

Diamo un accenno alla dimostrazione. (52) segue evidentemente da (49) e (50). D'altra parte procedendo come nella dimostrazione del teorema 1 si ottiene

(54) $$L(x)(s) = \frac{L(h)(s)}{L(K)(s)} .$$

Osserviamo ora che dalla definizione (46) di K(u) si ottiene

(55) $$K = \bar{K} - \beta(\bar{K} * e^{ru}),$$

onde applicando la trasformata di Laplace a (55)

(56) $$L(K)(s) = (1 + \beta \frac{1}{s-r}) L(\bar{K})(s).$$

(56) dimostra che il denominatore di (54) ha uno zero per $z = g$ essendo g dato da (51). Poiché i teoremi tauberiani si estendono nel caso di trasformata di Laplace di distribuzioni [13: ch. 8 § 8.12], è facile provare che

(57) $$x_1(t) \sim e^{gt} \quad \text{per } t \to +\infty,$$

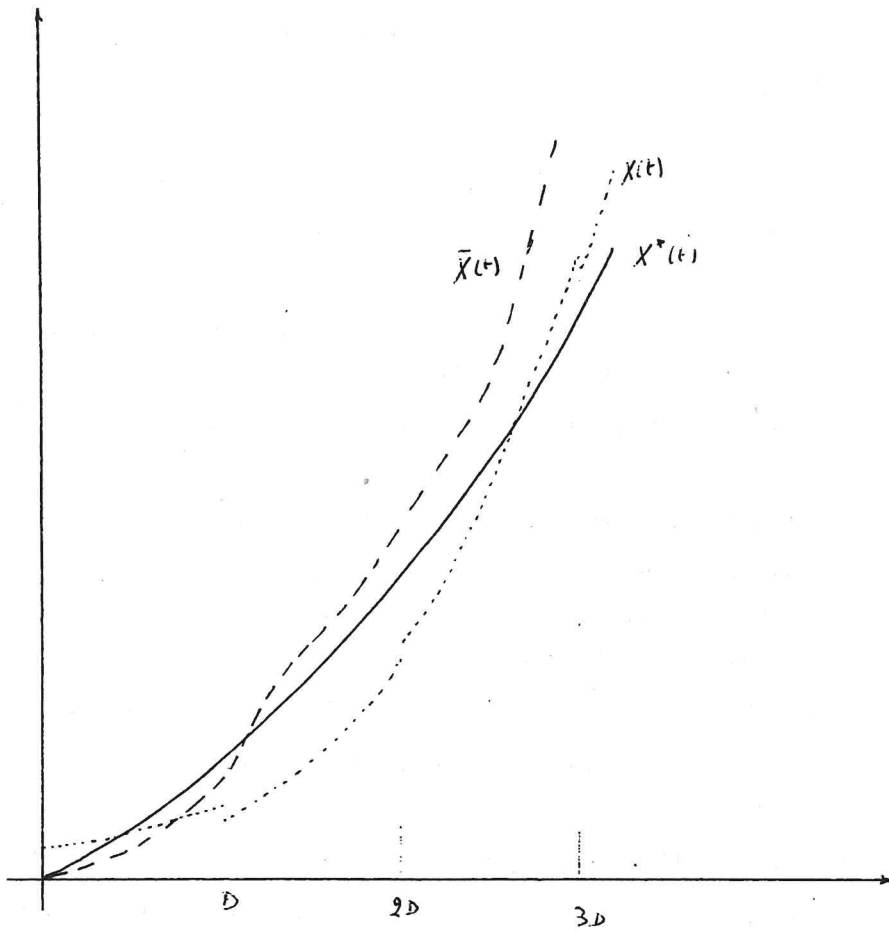
essendo $x_1(t)$ la distribuzione che compare in (49). (57) prova (53) se si tiene conto del significato di $X_1(t)$.

Prima di chiudere commentiamo brevemente (52). Il primo addendo a secondo membro mostra che la funzione X(t) ha una discontinuità in tutti i punti della forma $t = jD$ $j = 0,1,2,\ldots$; poiché $q(D)/q(o) < 0$ i salti in tali punti sono alternativamente positivi e negativi e poiché è economicamente plausibile supporre che $q(D) < |g(0)|$ la loro ampiezza decresce al crescere di j. Questo addendo rappresenta dunque una componente ciclica dove si alternano pe-

riodi di rapida espansione dell'apparato produttivo a periodi di contrazione del medesimo; tuttavia il calo del numero di processi attivati nei punti $t = (2j+1)D$, $j = 0,1,2,\ldots$, ci sembra sia da interpretare come ricorso al le scorte o meglio al credito per far fronte alla temporanea carenza di risorse determinato dal termine della durata dei processi elementari attivati rispettivamente nei tempi $t = 2jD$ $j=0,1,\ldots$, piuttosto che come troncamento di processi attivati nell'intervallo $(2jD, (2j+1)D)$ $j = 0,1,2,\ldots$ dovuto alla mancanza di risorse necessarie per mantenerli in esercizio.

Osserviamo espressamente che è l'ipotesi (40) a generare la discontinyuità di $x(t)$ in zero mediante la caduta dei consumi extrasalariali che permette l'attivazione immediata di un consistente numero di processi produttivi al tempo $t = 0$. La propagazione della discontinuità in tutti i punti $t = jD$ $j = 1,2,\ldots$ dipende invece dal fatto che la durata dei processi è fissata e vale precisamente D. Dunque la caduta del consumo extrasalariale genera un impulso alla crescita del sistema (nel senso di [12: ch. XIV]) mentre la durata fissa dei processi produttivi trasforma tale impulso in quello che Einarsen [7] definisce ciclo d'investimento puro; per una trattazione esauriente del problema dei cicli di reinvestimento nella quale si situa anche il presente caso rimandiamo a [8].

Il secondo addendo di (52) rappresenta invece la componente di trend dell'economia e mostra chiaramente attraverso (53) che il sistema economico tende asintoticamente verso un nuovo stato a crescita uniforme con tasso di crescita g dato da (51). In questo caso è evidente che tutte le variabili economiche crescono asintoticamente al tasso g compresi i consumi extrasalariali $C(t)$. La perfetta analogia fra (51) e (42) permette quindi di concludere che sotto l'ipotesi (40) l'innovazione tecnica provoca due diversi effetti: nel breve-medio periodo da luogo ad una serie di oscillazioni cicliche innescate dalla variazione improvvisa del tasso d'interesse al tempo $t = 0$, sul lungo periodo però l'economia tende nuovamente a stabilizzarsi ad un tasso di crescita g che sarà superiore a quello precedente g^* nella stessa misura in cui si è accresciuto il tasso di rendimento interno dei processi elementari di produzio-

ne utilizzati.

BIBLIOGRAFIA

[1] ARROW, K.J.; INTRILIGATOR, M.D.: Handbook of Mathematical Economics, North Holland, Amsterdam, 1986.

[2] BALDONE, S.: Integrazione verticale, struttura temporale dei processi produttivi e transizione fra le tecniche. Economia Politica a I (1984), 79.

[3] BELLOC, B.: Croissance économique et adaptation du capital productif, Economica, Paris, 1980.

[4] BÖHM-BAWERK ,: Kapital und Kapitalizins, Innsbruck, 1889.

[5] DEBREU, G.: Theory of Value, Wiley, New York, 1959.

[6] DORFMAN, R.; SAMUELSON, P.; SOLOW, K: Linear Programming and Economic Analysis, Mc Graw-Hill, New York, 1958.

[7] EINARSEN, J.: Reinvestment Cycles. Review of Economic Statistics XX (1938), 1.

[8] EINARSEN, J.: Reinvestment Cycles, J. Ch. Grundersens. Oslo, 1938.

[9] GOZZI, G.; ZAMAGHI, S.: Crescita non uniforme e struttura produttiva: un modello di traversa a salario fisso. Giornale degli Economisti ed Annali di Economia XLI (1982), 305.

[10] Von HAYEK, F.A.: The Pure Theory of Capital, Macmillan, London, 1941.

[11] HICKS, J.: Capital and Time. A Neo-Austrian Theory, Oxford University Press, London, 1973.

[12] HICKS, J.: Methods of Dynamic Economics. Clarendon Press, Oxford, 1984.

[13] MISRA, O.P.; LAVOINE, J.L.: Transform Analysis of Generalized Functions. North Holland, Amsterdam, 1986.

[14] PINI, B.: Terzo corso di analisi Matematica, CLUEB, Bologna 1977.

[15] SCAZZIERI, R.: The Production Process: General Characteristics and Tassonomy. Rivista internazionale di Scienze Economiche e Commerciali (1983).

[16] SCHWARTZ, L.: Theorie des Distributions. Herman, Paris 1966.

[17] TRIEBEL, H.: Höhere Analysis. VEB Deutsche Verlag des Wiessenschaften, Berlin, 1972.

[18] VIOLI, R.: Sentiero di traversa e convergenza. Giornale degli Economisti ed Annali di Economia, XLIII (1983), 153.

[19] Von NEUMANN, J.; MORGENSTERN, O.: Theory of Games and Economic Behaviour, Princeton Univ. Press, Princeton, 1944.

[20] WALRAS, L.: Elêment d'économie politique pure, Corbaz, Lansonne, 1874.

[21] WICKSELL, K.: Lectures on Political Economy, London, 1901-1906.

[22] WIDDER, D.V.: The Laplace Transform. Princeton Univ. Press, Princeton, 1946.

[23] ZAMAGNI, S.: Ricardo and Hayek Effects in a Fixwage Model of Traverse. Oxford Economic Papers XXXVVI (1984), 135.

[24] ZEMANIAN, A.M.: Distribution Theory and Transform Analysis, Mc Graw Hill, New York, 1965.